¿Infinito? …¿Para qué?

Juan Antonio Pérez
Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas

mayo 2, 2025

Nada ha conmovido tan profundamente
el espíritu del hombre, como el infinito.

DAVID HILBERT

Al norte de Australia se encuentra la isla de Nueva Guinea, la segunda isla más grande del planeta después de Groenlandia, con una población menor a 14 millones de personas y con un tercio de la superficie de nuestro México. Un verdadero fragmento del paraíso.

Esta maravillosa isla, tres veces más grande que la Isla Británica, se divide en dos países: Nuevas Guinea Occidental y Papúa Nueva Guinea. Este pequeño trozo del planeta ofrece varias lecciones valiosas para nuestra arrogante civilización, uno de ellos es que, la mitad occidental tiene dos lenguas oficiales, y la zona oriental cuenta con tres: un edén políglota.

Cerca de la capital de Papúa Nueva Guinea, la ciudad costera conocida como Puerto Moresby, pueden encontrarse todavía asentamientos de la tribu *Arapesh*, una etnia que desconoce la violencia, las jerarquías políticas y los roles de género. Un verdadero laboratorio viviente para la sociología y la antropología. Tal vez el último ejemplo de comunismo primitivo.

El alto sentido de cooperación de los Arapesh los hace ajenos a la agresividad y la envidia. Su peculiar concepción de la sexualidad y los roles familiares y de pareja han llamado poderosamente la atención de antropólogos como Per Hage (1935 – 2004) y matemáticos como Frank Harary (1921 – 2005). En 1983 Hage y Harary publicaron un artículo que propone un modelo matemático para el comportamiento de los Arapesh en relación con los roles de género, bajo el título *Arapesh sexual symbolism, primitive thought and Boolean groups*[1].

El modelo Hage-Harary merecerá una de nuestras colaboraciones, pues además de interesante es particularmente gráfico. Una lección más de los Arapesh es el desapego a los bienes materiales, lo que ha sido un fuerte impedimento para su desarrollo aritmético. Carecen de un nombre para el numeral "cuatro", de manera que su manera típica de contar se restringe a *uno, dos, tres . . . muchos*.

La necesidad del infinito matemático es ilustrado con el ejemplo de la artimética arapesh por el físico ucraniano George Gamow (1904 – 1968) en su bello libro *Uno, dos, tres . . . infinito*. Gamow es también reconocido como uno de los precursores de la teoría de la *Gran Explosión*[2], para lo cual introduce el concepto de *ylem* o "material primordial". Otro tema para el futuro.

En la jerga cotidiana el infinito suele usarse con fenomenal descuido, confundiendo el concepto con la percepción de lo "muy grande". Una forma coloquial de describir lo infinito es presentarlo como algo más grande que cualquier cosa grande, lo que ya necesita de una transformación revolucionaria de la intuición.

El gran Arquímedes (287 – 212 ane) nunca abandonó su ciudad natal, el Puerto de Siracusa en la costa oriental de la isla mediterránea de Sicilia, pese a lo cual, su conocimiento del universo era tan vasto que sorprendería aún hoy a una persona culta. Escribió su obra *Arenario* para demostrar que la cantidad de granos de arena en las costas del planeta, siendo fabulosamente grande, no era infinita.

En aquel entonces Siracusa era parte del territorio griego, y el imperio romano estaba interesado en su conquista. Arquímedes muere asesinado durante un episodio del asedio romano. Este gran siciliano era poseedor de conocimientos suficientes como para calcular el volumen del planeta, digamos V, y por supuesto era capaz de estimar el volumen promedio de un grano de arena, digamos v. Dedujo entonces, que el númjero de granos de arena sobre la Tierra no podía exceder el cociente V/v, que es aproximadamente 10^{24}. Muy grande, pero finito.

La razón por la que podemos expresar una cota para el número de

[1] *Simbolismo sexual arapesh, pensamiento primitivo y grupos Booleanos.*

[2] Big Bang.

granos de arena en el planeta es que tenemos números suficientes, es decir, tenemos una cantidad infinita de números naturales, lo que nos permite expresar cualquier cantidad por grande, o por diminuta, que ésta sea.

Al infinito se le puede quitar algo finito quedando un remanente infinito, es decir, sin sufrir merma. Veamos los números naturales $1, 2, 3, \ldots$ constituyen un conjunto infinito, al igual que los mayores que 100, digamos $101, 102, 103, \ldots$. A esta paradoja se la conoce como el *Hotel de Cantor* en honor al ruso Georg Cantor (1845 – 1918).

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & 2 \arrow[dr] & 3 \arrow[dr] & 4 \arrow[dr] & 5 \arrow[dr] & 6 \arrow[dr] & 7 \arrow[dr] & 8 \arrow[dr] & 9 \arrow[dr] & 10 \arrow[dr] & \cdots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots
\end{tikzcd}$$

Más aún, la mitad del infinito es infinito, puesto que el conjunto de los naturales $1, 2, 3, \ldots$ es tan grande como el subconjunto de los pares $2, 4, 6, \ldots$, hecho que es conocido como la paradoja del *Hotel de Hilbert*, en honor al alemán David Hilbert (1862 – 1943). El infinito puede partirse en una cantidad finita de partes infinitas e incluso en una cantidad infinita de infinitos.

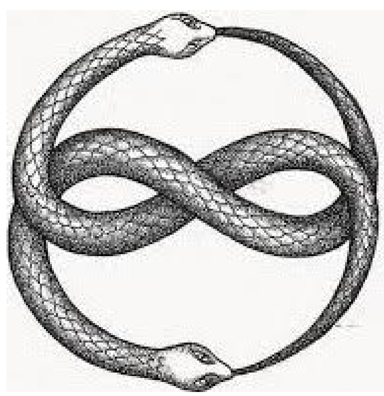
$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dd] & & 2 \arrow[dd] & & 3 \arrow[dd] & & 4 \arrow[dd] & & 5 \arrow[dd] & & 6 \arrow[dd] & & 7 \arrow[dd] & & 8 \arrow[dd] & & 9 \arrow[dd] & & 10 \arrow[dd] & & \cdots \\
1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & 13 & & 15 & & 17 & & 19 & & 21 & \\
 & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & & 12 & & 14 & & 16 & & 18 & & 20 & & \cdots
\end{tikzcd}$$

En el primer caso, la administración del "hotel infinito", una vez lleno, resuelve el conflicto del arribo de un nuevo huésped, lo que admite, heurísticamente, la expresión simbólica $\infty + 1 = \infty$. En el segundo caso, el hotel, totalmente ocupado, recibe una cantidad infinita de nuevos huéspedes; una forma de representarlo es $2\infty = \infty$.

Expresiones que pudieran parecer altamente románticas como "*te amo infinitamente*" constituyen en realidad una trampa semántica: se puede amar a dos personas con la misma infinita intensidad. Se puede amar incluso de la misma forma a cualquier cantidad de personas. Mucho, por mucho que sea mucho, no es infinito.

Pero entonces, si no hay nada infinito en el mundo material y el infinito solo tiene lugar en matemáticas, además de la Teología, ¿para qué tanto empeño en estudiar el infinito? La respuesta es simple, sencilla y contundente: para que nada nos haga falta. Por otro lado, el infinito en un modelo eficiente de todo lo finito. Podemos tratar así con los materiales como si fueran un todo sin entrar en el detalle de su composición. El infinito ha sido de gran utilidad durante toda la Historia y seguirá siéndolo en el futuro.

El símbolo que conocemos de infinto "∞", aparece por primera vez en 1656 dentro de la obra *Arithmetica Infinitorum* del inglés John Wallis (1616 – 1703). La idea de Wallis era expresar gráficamente la idea de lo interminable, lo eterno, lo inagotable. El círculo era un buen candidato, pero ya era ocupado por el cero y una de las letras vocales, así que recurrió al doble *uroboro*: la serpiente que muerde su propia cola, presente en el sarcófago de Unis en 2,300 ane.



A finales del siglo XIX Cantor demuestra que la cardinalidad del conjunto potencia de un conjunta dado A es estrictamente mayor que la cardinalidad de A, y que es igual a $2^{|A|}$, donde $|A|$ es la cardinalidad de A, es decir, el número que expresa la cantidad de elementos que A tiene.

De esta manera, si A es un conjunto infinito, se deduce que $\infty < 2^{\infty}$. Esto obliga a la existencia de más de un infinito y, de hecho, a la existencia de una cantidad infinita de infinitos. Nace así la *Aritmética Transfinita*, De ella trataremos en una colaboración futura.