Un fractal ... por cual

Juan Antonio Pérez
Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas

mayo 28, 2025

Se entiende con facilidad
al niño que teme a la oscuridad,
la verdadera tragedia es la del hombre
que le tiene miedo a la luz.

PLATÓN

La convergencia es un fenónemo matemático fascinante, en lo fundamental, porque en él interviene el infinito. Una circunstancia en la que lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño conviven armoniosamente; una íntima unión de duales.

Veamos, como 100 es más grande que 10, entonces recíprocamente $\frac{1}{100}$ es más pequeño que $\frac{1}{10}$. Un centésimo es más pequeño que un décimo. Un conjunto infinito y ordenado es una *sucesión*, y cada uno de los elementos es un *término* de la sucesión.

Si los términos son sucesivamente más cercanos a un valor dado a, se dice que la sucesión *converge* al valor a. Por ejemplo, la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{1000}, \ldots$$

asume valores cada vez más cercanos a cero y tan pequeños como nos resulte posible imaginar. Decimos entonces que la sucesión *converge* a cero. Análogamente, la sucesión

$$\pi + 1, \pi + \frac{1}{2}, \pi + \frac{1}{3}, \pi + \frac{1}{4}, \ldots, \pi + \frac{1}{100}, \ldots, \pi + \frac{1}{1000}, \ldots$$

toma valores cada vez más cercano a π, y la diferencia de estos valores con π es indefinidamente pequeña. Luego, la sucesión anterior converge a π.

Nada hay más cercano a un valor que el valor mismo. Como ejemplo, la sucesión

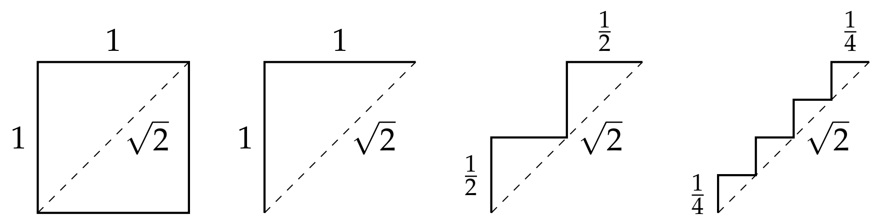
$$2, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \ldots, \frac{100}{50}, \ldots, \frac{1000}{500}, \ldots$$

converge a todos, simplemente porque cada uno de sus términos es igual a 2. De hecho, la sucesión anterior es la misma que

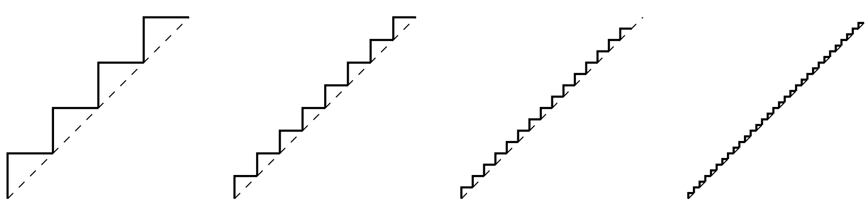
$$2, 2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots, 2, \ldots$$

por lo que decimos que es una *sucesión constante*.

Es momento del ingrediente geométrico. Consideremos un cuadrado en el que cada lado tiene longitud 1, cuyo perímetro es entonces 4, y el semiperímetro, trazado a la derecha del cuadrado tiene longitud 2.

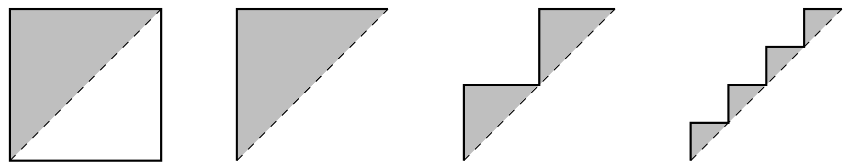


Por el Teorema de Pitágoras sabemos que la diagonal del cuadrado en cuestión tiene longitud $\sqrt{2}$.

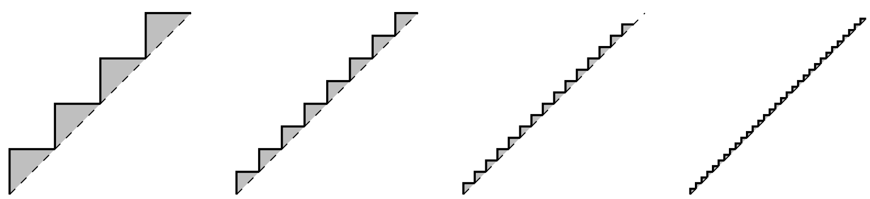


La suma de longitudes en cada "escalera" es constante e igual con 2. Dejándose llevar por la intuición se podría concluir que en el límite, es decir, cuando la escalera alcance una cantidad infinita de escalones se convierte en la diagonal, es decir, es un segmento rectilíneo.

No vayamos tan rápido, la suma de longitudes en cada "escalera" es constante e igual con 2. La sucesión de las sumas es entonces constante 2 y por tanto converge a 2, en tanto que la diagonal mide $\sqrt{2}$. Si lo obtenido no es un objeto de dimensión 1, entonces podría ser un objeto de dimensión 2. No tan rápido: la "escalera" con escalones de altura $\frac{1}{2}$ tiene área $\frac{1}{4}$



Regresemos entonces al cuadro, y observemos que la superficie por encima de la diagonal tiene área $\frac{1}{2}$. Además, las superficies entre cada escalera y la diagonal es cada vez la mitad de la anterior. Si los escalones tiene altura $\frac{1}{2}$, el áea entre la escalera y la diagonal es $\frac{1}{4}$, y si la altura es $\frac{1}{4}$, el área es $\frac{1}{8}$.

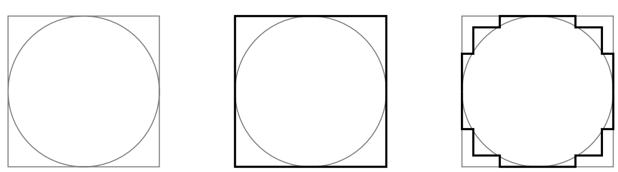


La sucesión de las áreas es entonces

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

que se hace tan pequeña como se quiera, es decir, converge a cero. En otras palabras, en el límite, lo que se obtiene no es tampoco una superficie: no tiene dimensión 2. Lo que se obtiene no es entonces un segmento de recta y tampoco una superficie, sino un *fractal*, un objeto cuya dimensión no necesariamente puede expresarse por medio de un número entero.

El ruso Andréi Nikolayevich Kolmogórov (1903 - 1987) ideó una forma consistente de asignar una dimensión a este tipo de objetos, conocida como la *dimensión de entropía* que en nuestro caso puede expresarse como el logaritmo natural de 2, es decir, aproximadamente 0.6932, lo que coloca a nuestra "escalera" más cerca de ser una superficie que una línea.



Un objeto semejante se obtiene de un cuadrado circunscrito a una circunferencia. La introducción de "escalones" alrededor del círculo conduce a un objeto cada vez más cercano a la circunferencia, pero que tiene el mismo perímetro que el cuadrado original. Nuevamente, en el límite, el objeto geométrico se encuentra, geométricamente, entre ser superficie y lo lineal.

Un fractal que goza de mayor popularidad es el triángulo de Sierpiński, llamado así en memoria del polaco Waclaw Sierpiński (1882 - 1969), así como el método de asignar dimensión debida al alemán Felix Hausdorff (1869 - 1942). De ello trataremos en la siguiente colaboración.