

Matemáticas y sistemas electorales

Juan Antonio Pérez
Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas

julio 08, 2025

*La elección de mercancías expresa gustos
las preferencias electorales refleja principios.*

J. KENNETH ARROW (1921 - 2017)

Es habitual identificar a la estadística con la rama de las matemáticas que sirve como herramienta al estudio de fenómenos electorales. Los métodos estadísticos son innegablemente valiosos para describir los escenarios electorales, e incluso para pronosticar la evolución de las relaciones políticas.

Sin embargo, la comprensión del devenir requiere un modelo que se ajuste al comportamiento de los procesos electorales, para lo cual se requirió la intervención de disciplinas como la matemática discreta y más recientemente la topología. La noción de proximidad, propia de la topología, abre la posibilidad de modelar fenómenos sociales, relaciones humanas y comportamientos humanos.

Es bien sabido que entre los premios Nobel, no hay uno dedicado a los descubrimientos matemáticos, pero la ciencia es material poroso, y la matemática ha encontrado el camino. Las vías de acceso han sido otras disciplinas, unas que se conciben como próximas, tal es el caso de la física y la química, o bien aparentemente lejanas como la medicina y la fisiología.

Sin duda, la disciplina que con mayor frecuencia ha tomado las herramientas matemáticas de la mano para llegar al Nobel es la economía. Tal vez fue en un acto premonitorio que Alfred Nobel no incluyó la ciencia

económica como merecedora de ser reconocida, sino que con posterioridad, el premio fue creado en 1968 por el Banco Central de Suecia y entregado por ocasión primera en 1969. Su nombre oficial es en sueco: *Sveriges riksbanks pris i ekonomisk vetenskap*.

El Nobel de Economía de 1972 fue otorgado al norteamericano Joseph Kenneth Arrow por un resultado contenido en su tesis de 1951 en la Universidad de Stanford, mediante la cual obtuvo el grado de doctor en Ciencias Económicas. Su logro se conoce como el *Teorema de Imposibilidad* y establece la inexistencia de un sistema electoral que satisfaga todas las condiciones de imparcialidad, racionalidad y consistencia en la toma colectiva de decisiones. De forma equivalente: no existe un sistema de elecciones libre de paradojas o inconsistencias.

Un proceso electoral no es, de acuerdo con Arrow, otra cosa que un mecanismo para convertir las preferencias individuales en una "preferencia social", y no hay una forma de que esta metodología refleje fielmente el sentir común. Desarrolla un sistema axiomático de cinco principios que, según su criterio, debería satisfacer idealmente todo sistema de elecciones:

Totalidad. Toda opción es elegible.

No dictadura. Ningún elector puede imponer su criterio.

Independencia. La adición o supresión de alternativas no modifica las preferencias de las restantes.

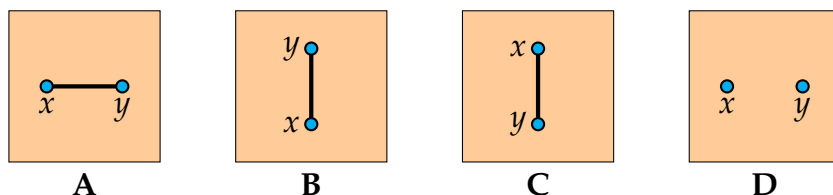
Eficiencia de Pareto. Las preferencias de la mayoría deben reflejarse en la elección.

No paradojas. La clasificación de las preferencias debe ser consistente.

Arrow, antes del doctorado, cursó una maestría en matemáticas, lo que le permitió usar de forma eficiente métodos combinatorios para la demostración matemática de su célebre *teorema de imposibilidad*.

Mediante métodos homotópicos, a fines del siglo XX, la matemática y economista argentina Graciela Chichilniski (1946 -) introduce la topología como herramienta en ciencias económicas. Recientemente, la topología de espacios finitos ofrece instrumentos más eficientes para uso con los mismos propósitos.

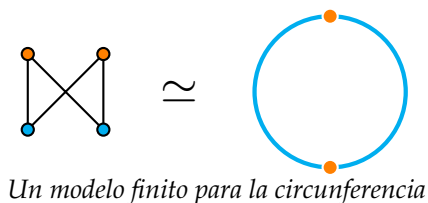
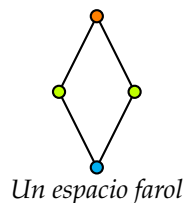
La idea original de Arrow es que toda preferencia electoral es no más que una ordenación de las alternativas. Para ilustra, consideremos el caso de dos candidaturas.



Arrow consideraba órdenes lineales como en los diagramas **B** y **C**, en los que necesariamente una opción es preferida con respecto a otra. El el diagrama **B** la opción y es preferida con respecto a x lo que se expresa mediante " $x \preceq y$ ". El el diagrama **C** la opción x es preferida con respecto a y lo que se simboliza con " $y \preceq x$ ".

La argumentación matemática de Arrow es elemental, y sin embargo muy elaborada y difícil de seguir, pero concluye que cualquiera de las preferencias puede llevarse de forma suave a una "dictadura". En un contexto más contemporáneo diremos que los espacios con dos puntos de los diagramas **B** y **C** son contráctiles, es decir, pueden reducirse continuamente a un punto, de hecho, a cualquiera de los dos. Para los más curiosos, vale la pena informar que los dos diagramas aludidos describen espacios de Sierpiński duales, llamados así en alusión al polaco Waclaw Sierpiński (1882 - 1969).

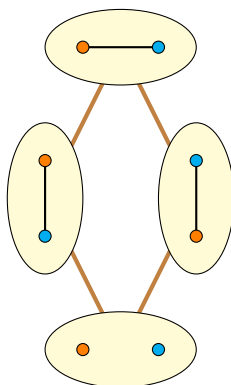
La clave es la noción topológica de contractilidad, los espacios topológicos involucrados son espacios de Alexandroff, es decir, aquellos que tienen un orden, y que por ello pueden ser visualizados mediante diagramas de Hasse, como los de la ilustración anterior. Los nombres se originana en le ruso Pavel Alexandroff (1896 - 1982) y el alemán Helmut Hasse (1898 - 1979). Y todos los espacios finitos son de Alexandroff.



La formulación topológica en términos de espacios topológicos finitos permite generalizar el resultado de Arrow sin dificultades adicionales. Un descubrimiento interesante es que todo espacio finito con un máximo o un mínimo es contráctil. Un espacio farol, como el de la figura anterior es contráctil pues tiene tanto máximo como mínimo. El punto naranja es máximo y el azul es mínimo.

Desde este punto de vista, podemos considerar casos como los ilustrados en los diagramas **A** y **D**. En **A** representamos un "empate" por analogía: ambas opciones son igualmente buenas o igualmente malas porque, por ejemplo, tienen programas políticos semejantes. En **D** se ilustra un "empate por indiferencia", que es el caso en el que siendo diferentes son igualmente aceptables o rechazables.

El diagrama de la derecha, en la ilustración previa, es un modelo finito para la circunferencia, y al igual que la circunferencia no es contráctil: carece tanto de máximo como de mínimo. Otro punto central en esta perspectiva es que hay un orden entre los órdenes y que el espacio de estos espacios es un farol, y en consecuencia contráctil.



Para convencer pues a los electores, bastará iniciar propagandeando que ambas opciones son esencialmente la misma. Cualquier semejanza con la realidad no es casualidad en modo alguno, es ciencia.