El matemático nómada

Juan Antonio Pérez
Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas

marzo 26, 2026

*Un matemático es una máquina
que convierte café en teoremas.*

PAUL ERDÖS (1913 - 1996)

En la historia de la ciencia destacan dos matemáticos por su admirable capacidad productiva. Ellos son el suizo Leonhard Euler (1707 - 1783) y el autor de epígrafe de hoy, el húngaro Paul Erdös: Euler publicó más artículos que Erdös, y este último más páginas que el primero. Otro rasgo común es un genio extraordinario y un inquebrantable amor por el descubrimiento matemático.

Sus vidas personales, sin embargo, distan mucho de ser paralelas. Erdös nunca tuvo hijos ni pareja, y ni siquiera una casa o domicilio fijo, no tuvo posesiones materiales y su único patrimonio consistió siempre de una pequeña maleta con algo de ropa y unos pocos libros. Euler, por el contrario fue un esposo dedicado y el amoroso padre de trece hijos. Pronto nos ocuparemos de él.

Erdös nace un 26 de marzo, y esa es la razón para que el texto presente sea dedicado a su obra y su vida como un modesto homenaje a sus aportaciones, mismas por las que es recordado con admiración en el seno de la comunidad matemática internacional. Aún para aquellos no familiarizados con el quehacer matemático, tal vez la frase del epígrafe resulte familiar en alguna medida.

La vida de Erdös es tan peculiar, que ha sido llevada a las pantallas grandes en la cinta *N es un número: El retrato de Paul Erdös*, rodada en vida del matemático, y documentada en el libro de Paul Hoffman *El hombre que solo amaba a los números* (1998), ensayo de corte histórico que contó con la asesoría del propio personaje. El título de la obra de Hoffman difícilmene puede ser más descriptivo; una de las expresiones que más se recuerdan de Erdös es "*Si los números no son bellos, nada lo es*".

Erdös no era un hombre ni solitario ni anti social, siempre estaba rodeado de amigos, eso si, matemáticos todos, pues sus conversaciones difícilmente versaban sobre asuntos diferentes al quehacer matemático; se cuenta que la primera pregunta hacia alguien que acabase de conocer era "*¿cuál es tu teorema favorito*". Era atento con los niños y podía detectar sus talentos matemáticos a edad temprana, y se refería a ellos como "los épsilons", pues es costumbre en matemáticas designar esa letra del alfabeto griego para hacer referencia a números que representan cantidades minúsculas.

Tan vasta fue su producción científica, que mantenía correspondencia con matemáticos alrededor de todo el planeta, lo que llamó la atención del gobierno estadounidense, en el caso particular de los chinos. El senador republicano Joseph McCarthy (1908 - 1957), adicto a las listas negras de presuntos "comunistas", promovió políticas estrictas de control ideológico que, por supuesto tuvieron repercusiones migratorias, especialmente entre 1950 y 1956. Huyendo de la cruzada anti judía de Adolf Hitler (1889 - 1945), Erdös residía en Estados Unidos desde 1938, cuando en 1954, regresando de una estancia académica en Europa fue víctima de la cruzada anti comunista de McCarthy. A su arribo al aeropuerto se le preguntó si sabía algo acerca de Karl Marx (1818 - 1883) siendo su respuesta "*no mucho, entiendo que fue un gran hombre de ciencia*". La respuesta fue lo suficientemente comunista como para negarle su reingreso a la Unión Americana, para lo que fue necesaria la intervención de la Sociedad Matemática Estadounidense (American Mathematical Society).

Además de prolífico acusó una gran precocidad científica, obteniendo el doctorado a los 21 años, luego de haber publicado su primer artículo a la tierna edad de16. Este primer trabajo fue publicado por la Universidad Péter Pázmány de Budapest bajo el título *Una demostración asombrosamente simple del teorema de Chebyshev*, cuyo aserto es que entre todo número natural n y su doble $2n$ es posible siempre encontrar por lo menos un número primo.

Nuestro homenajeado sentía especial fascinación por los números primos; se le atribuye haber afirmado "*ciertamente Dios no juega a los dados con el universo, pero algo extraño pasa con los números primos*". Recordemos que un número natural es primo si tiene exactamente dos divisores y solo en ese caso. Por ejemplo, 13 es primo porque sus únicos divisores so 1 y 13, mientras que 12 no lo es porque tiene como divisores a 1, 2, 3, 4, 6 y 12. El número 1 tampoco es primo porque tiene un único divisor, que es él mismo.

Entre 2 y 4 tenemos el primo 3. Entre 3 y 6 está el primo 5. Hay pares más afortunados, entre 10 y 20 tenemos los primos 11, 13, 17 y 19. Es de esperarse que la cantidad de primos entre n y $2n$ sea mayor cuanto más grande sea n, lo que dicho sea de paso, queda garantizado por un resultado del propio Erdös; el *Teorema del Número Primo*.

Este resultado afirma que el número de primos entre 1 y n es cercano a

$$\eta(n) = \frac{n}{\log n}$$

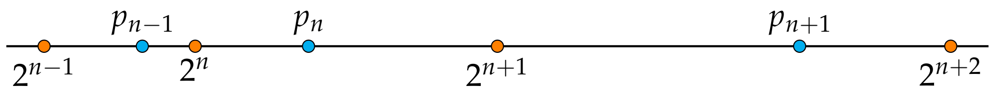
donde log es el *logaritmo natural*. Veamos la siguiente tabla, donde $\Pi(n)$ es el número de primos entre 1 y n.

n	50	100	200	400	800
$\Pi(n)$	15	25	46	78	147
$\eta(n)$	12.78...	10.85...	37.74...	66.76...	119.67...
$\Pi(2n) - \Pi(n)$	10	21	32	69	104

El comportamiento del arreglo anterio sugiere que entre 1 y n hay por lo menos $\eta(n)$ números primos. Tenemos que $\Pi(1600) = 251$, es decir, hay 251 primos entre 1 y 1600, de manera que entre 800 y 1600 hay 104 de ellos. Tal parece que la cantidad de primos entre 1 y n es cercana a la mitad de los que hay entre n y $2n$.

El argumento de Erdös en su demostración es en efecto, tal y como lo asienta el título de su trabajo, asombrosamente elemental, aunque cae fuera del espectro de un texto como el que ahora usted lee. En lugar de enrar en los detalles de tal demostración, le ofrezco, caro lector, usar el resultado para demostrar la infinitud de los número primos.

Observemos que $2^3 = 8$ es el doble de $2^2 = 4$, y que, en general 2^{n+1} es el doble de 2^n. Si elegimos un primo p_n entre 2^n y 2^{n+1} obtenemos una cantidad infinita de primos, porque hay una cantidad infinita de segmentos enteros con límite inferior 2^n y límite superior 2^{n+1}.



Tratando de entender el razonamiento de Erdös, por si le gana la curiosidad, recordemos que el *factorial* $n!$ de un número natural n es el producto de los enteros desde 1 hasta n mismo, por ejemplo, $1! = 1$, $2! = 1(2) = 2$, y $5! = 1(2)(3)(4)(5) = 120$. Se conviene que $0! = 1$, con el fin de manejar factoriales desde cero, lo que es conveniente para expresar potenicias de polinomios de forma sucinta y elegante.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc|c}
 & & & & & & 1 & & & & & & & 2^0 = 1 \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & 2^1 = 2 \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & 2^2 = 4 \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & 2^3 = 8 \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & 2^4 = 16 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & 2^5 = 32 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & 2^6 = 64
\end{array}
$$

En este arreglo triangular, conocido como el *triángulo de Pascal* en reconocimiento al francés Blaise Pascal (1623 - 1662) a quien se debe su formulación. Los números que ahí aparecen son os *coeficientes binomiales* de la forma

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

que se encuentra en el k-ésimo lugar de la n-ésima fila, sin perder de vista que las entradas de la n-ésima fila se numeran de 0 a n. Por ejemplo

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{2(6)} = 10,$$

que se ve en el lugar número 2 del quinto renglón, y que como puede observarse, es la suma de los dos valores que se encuentra en la fila previa, en los lugares segundo y tercero.

$4 \qquad 6 \qquad \binom{4}{1} \qquad \binom{4}{2} \qquad \binom{n}{k} \qquad \binom{n}{k+1}$

$10 \qquad \binom{5}{2} \qquad \binom{n+1}{k+1}$

De la lógica con la que se construye el triángulo de Pascal se sigue que, en general

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

para k entre 0 y n, y adem
as

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

o sea, que los coeficientes de la n-ésima fila suman 2^n.

El joven Erdös se percató de que una fila par, digamos n, tiene una cantidad impar de entradas, o sea $n+1$ y que el coeficiente central

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

es el mayor de ellos. El argumento de Erdös, sin dejar de ser elemental es intrincado, por lo que remitimos al lector interesado a consultarlo en por ejemplo, al segundo capítulo del libro "Proofs from THE BOOK" de Aigner y Ziegler.

Observamos finalmente que, en la búsqueda de primos p entre n y $2n$, un tal primo p debe ser divisor de $(2n)!$ pero no de $n!$, por lo que debe tener la forma $p = n + k$ para k entre 1 y n.

Los números tienen todavía muchos secretos por revelar, mucho café por consumir, en el futuro. Entre tales misterios, los más celosos parecen ser los de los números primos.